الأسبوع الخامس

الاعداد المركبة/الجمع والطرح والضرب

والقسمة/التمثيل الهندسي للعدد المركب

الأعداد المركبة Complex Numbers

العدد المركب:- هو العدد الذي يتكون من جزأين حقيقي وخيالي ويكتب بصيغته العامة بالشكل التالي $z = x + iy$ حيث

x الجزأ الحقيقي للعدد المركب

y الجزأ الخيالي للعدد المركب

i الوحدة الخيالية حيث $i = \sqrt{-1}$

$\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = i^2 * \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^2 * \mathrm{i}^2 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 * i = i$

$i = -1$,

مثال :- ارسم العدد المركب $z = (2,3)$

$\therefore z = 2 + 3i$

$x = R(z) = 2$

$y = Im(z) = 3$

لكي نرسم العدد المركب نجد طول z حسب قانون فيثاغورس

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

$|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

مرافق العدد المركب:-

اذا كان العدد المركب $z = x + iy$ فأن مرافقه هو $\bar{z} = x - iy$

أي ان مرافق العدد المركب ينتج من عكس اشارة الجزأ الخيالي للعدد المركب فقط ويرمز له $\bar{Z}$

امثلة

1) $Z = 2 + 3i \quad \rightarrow \quad \bar{Z} = 2 - 3i$

2) $Z = -1 - 4i \quad \rightarrow \quad \bar{Z} = -1 + 4i$

3) $Z = 2i \quad \rightarrow \quad \bar{Z} = -2i$

4) $Z = 6 \quad \rightarrow \quad \bar{Z} = 6$

العمليات الأساسية للأعداد المركبة بالصيغة العامة :-

أمثلة محلولة:

مثال(1) لديك العددين المركبين $Z_1 = 2 + 4i \quad , Z_2 = 3 + i$

جد: - $(1)Z_1 + Z_2 \ , (2)Z_1 - Z_2 \ , (3)Z_1.Z_2 \ , \ (4)\frac{Z_1}{Z_2}$

$(1)Z_1 + Z_2 = (2 + 4i) + (3 + i) = (2 + 3) + (4i + i)$

$Z_1 + Z_2 = 5 + 5i$

$(2)Z_1 - Z_2 = (2 + 4i) - (3 + i) = (2 - 3) + (4i - i)$

$Z_1 - Z_2 = -1 + 3i$

$(3)Z_{1*}Z_2 = (2 + 4i) * (3 + i) = 6 + 2i + 12i + 4i^2$

$Z_{1*}Z_2 = 6 + 14i - 4$

$Z_1 * Z_2 = 2 + 14i$

$$(4)\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2+4i}{3+i} * \frac{3-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$$

بضرب الكسر والمقام في مرافق المقام

$$\frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{Z}_2} = \frac{6-2\mathrm{i}+12\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{(3^{2)}+(1^2)} = \frac{6+10\mathrm{i}+4}{9+1} = \frac{10+10\mathrm{i}}{10}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 1+i$$

مثال(2) لديك العددين المركبين

$$Z_1 = 4+6i \quad , Z_2 = 1+4i$$

جد:- $(1)Z_1 + \overline{Z_2}$ $(2)\overline{Z_1}$ --

$(3)\frac{Z_1}{\overline{Z_2}}$ Z_2

$$(1)Z_1 + \overline{Z_2} = (4+6i) + (1-4\mathrm{i}) = 5+2\mathrm{i}$$

$$(2)\overline{Z_1} - Z_2 = (4-6\mathrm{i}) - (1+4i) = 4-6i-1-4i$$

$$\overline{Z_1} - Z_2 = 3-10\mathrm{i}$$

$(3)\frac{Z_1}{\overline{Z_2}} = \frac{4+6i}{1-4i} * \frac{1+4i}{1+4i}$ بضرب الكسر في مرافق المقام

$$\frac{Z_1}{\overline{Z_2}} = \frac{4+16i+6i+24i^2}{1^2+4^2} = \frac{4+22i-24}{1+16}$$

$$\frac{Z_1}{\overline{Z_2}} = \frac{-20+22i}{17} = \frac{-20}{17} + \frac{22}{17}i$$

مثال (3) اثبت ما يأتي $\frac{\overline{(2+\imath)^2}}{(3-4i)} = 1$

$$\overline{(2+\imath)} = 2-i$$

$$\therefore \frac{(2-i)^2}{3-4i} = \frac{(2-i)(2-i)}{3-4i}$$

$$= \frac{4-1-2i-2i}{3-4i}$$

$$= \frac{3-4i}{3-4i} = 1$$

مثال(4)بسط المقدار التالي

$$\frac{5i^{19}-i^{100}}{2i^{81}-i^{77}}$$

$$i^{19} = i(i^{18}) = i(i^2)^9 = i(-1^9) = -i$$

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$$

$$i^{77} = i(i^2)^{38} = i(-1)^{38} = i$$

$$i^{81} = i(i^{80}) = i(i^2)^{40} = i(-1)^{40} = i$$

$$\therefore \frac{5(-i)-1}{2i-i} = \frac{-5i-1}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{5i^2+i}{-i^2}$$

$$= \frac{5(-1)+i}{-(-1)} = \frac{-5+i}{1} = -5+i$$

مثال(5) اثبت مايأتي:-

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = 1+i$$

⍟ اذا كان الأس للعدد زوجي فان الناتج $1+$ او -1

$$i^{30} = (i^2)^{15} = (-1)^{15} = -1$$

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = +1$$

⍟ اذا كان اس العدد فردي فان الناتج $+i$ او $-i$

$$i^{19} = i.i^{18} = i(i^2)^9 = i(-1)^9 = -i$$

$$i^{17} = i.i^{16} = i(i^2)^8 = i(-1)^8 = i$$

$$3i^{30} - i^{19} = 3(-1) — (-i) = -3+i$$

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = \frac{-3 + i}{-1 + 2\mathrm{i}} * \frac{-1 - 2\mathrm{i}}{-1 - 2\mathrm{i}}$$

$$= \frac{3 + 6\mathrm{i} - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2}{1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2} = \frac{5i + 3 + 2}{4 + 1} = \frac{5i + 5}{5}$$

$$= \frac{5(1 + i)}{5} = 1 + i$$