Complex Number
الاعداد المركبه

* مبدأ الاعداد المركبه

$Z^2 + 1 = 0$ ← معادله من الدرجه الثانيه

$Z^2 = -1 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{-1}$

هذا -1 هو مقدار خيالي حتى يكون قيمة i

$i = \sqrt{-1}$

$\therefore Z = \pm i$

بمعنى ذلك ←

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = 1$

$i^5 = i^4 . i = i$

* Forms of Complex Number
صيغ الاعداد المركبه

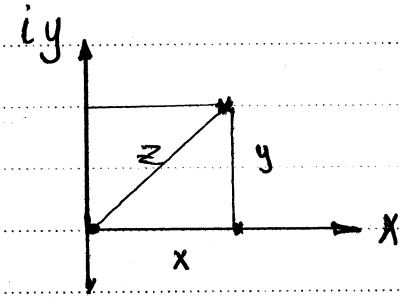
1- Cartesian

$$Z = X + iy$$

X = عدد حقيقي

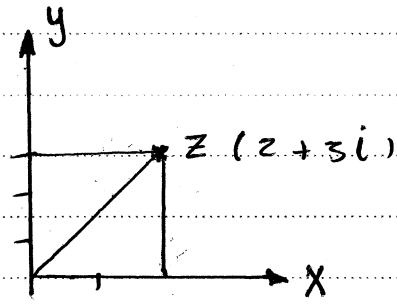
iy = عدد تخيلي

ولتمثل العدد Z على المحاور



مثال / مثل العدد المركب z على المحاور

$$Z = 2 + 3i$$



2- polar Form الصيغة القطبية

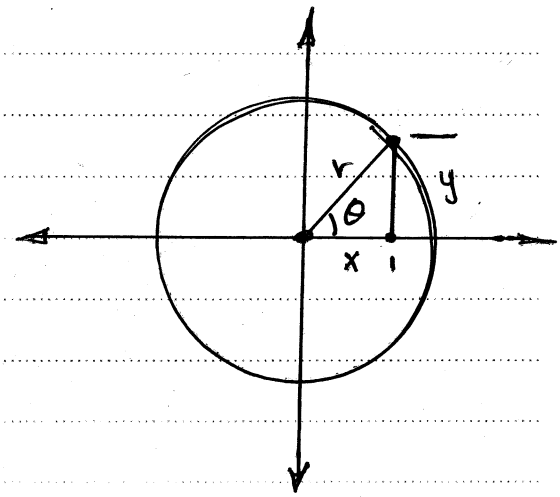
- تكون علاقة (x, y) مع (r, θ)

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$x = r\cos\theta$$



عكس الصيغة الأولى $Z = x + iy$

$$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$$

$$Z = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$ ← قانون الصيغة القطبية

3- Exponential Form الصيغة الأسية

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ علاقة أويلر

نعوض هذا المقدار في قانون الصيغة الثانية .

$$Z = r e^{i\theta}$$ ← قانون الصيغة الأسية

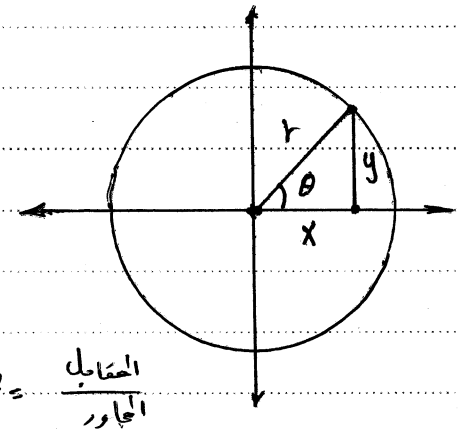
تحويل العدد المركب من صيغة الى اخرى N

صيغة الديكارتية

ex / Write the polar Form of $Z = 1 + i$

- اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب.

من المعادلة $\Rightarrow$ الحل $\Rightarrow x = 1 \quad , \quad y = 1$



فيثاغورس $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}\right)$

$\therefore r = \sqrt{1+1} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$

$= \tan^{-1}(1)$

- $\tan\theta$ تكون موجبة في ربعين

الربع الاول والثالث

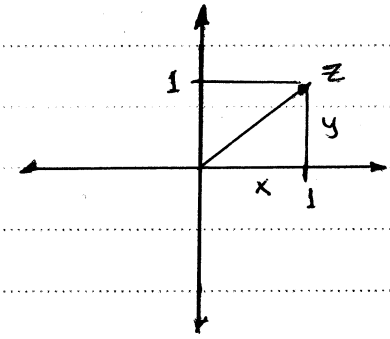
$180+45 = \frac{\pi 5}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{\pi}{4} + \pi$

$\frac{\pi}{4} = 45$ ربع اول ربع ثالث

$\pi/4$ و $5\pi/4$ ؟ ايهما اصح $\Leftarrow$

لمعرفة ايهما اصح يجب ان نرسم السؤال



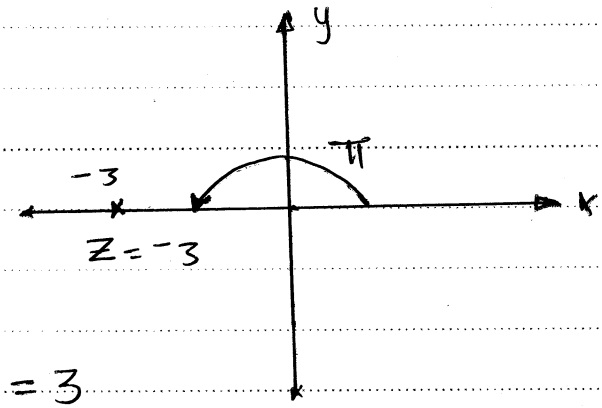
$\therefore$ حسب الرسم فان Z واقعة في الربع الاول ولذلك ستكمل $\frac{5\pi}{\pi}$

$\therefore Z = \sqrt{2} \angle \pi/4$ $\Rightarrow$ القطبية Polar

ويمكن تحويلها الى الصيغة الاسية بعد معرفة r, θ $\Rightarrow$ $Z = \sqrt{2}\, e^{i\,\pi/4}$

ex i. Write the polar form of $Z = -3$

الحل $x = -3$ و $y = 0$



من خلال الرسم نستطيع معرفة قيمة الزاوية وهي π

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{0}{-3}\right)$$

$$\tan^{-1}(0)$$

ملاحظة:

$\theta = 0 \Rightarrow \tan = 0$

$\theta = \pi \Rightarrow \tan = 0$

اذن يوجد احتمالين للزاوية هو $(0, \pi)$

ومن خلال رسم السؤال فان قيمة الزاوية تساوي (π)

الصيغة القطبية $\Rightarrow Z = 3 \angle \pi$ وتحويلها الى الاسية $Z = 3e^{i\pi}$

ex; Write the Cartesian form of $Z = \sqrt{2} \angle \pi/4$

الحل $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \pi/4$

$$x = r\cos\theta$$

$$= \sqrt{2}\cos\pi/4 \Rightarrow = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$y = r\sin\theta$$

$$= \sqrt{2}\sin\pi/4 \Rightarrow \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$Z = 1 + i$ ← الصيغة الاسية

العمليات على الاعداد المركبة

1- Addition and Subtraction جمع وطرح الاعداد المركبة

if $Z_1 = X_1 + iy_1$, $Z_2 = X_2 + iy_2$

$$Z_1 \mp Z_2 = (X_1 \mp X_2) + i(y_1 \mp y_2)$$

ex: if

$Z_1 = 3 - 2i$, $Z_2 = 5 + 3i$ Find ① $Z_1 + Z_2$, ② $Z_1 - Z_2$

sol ① $Z_1 + Z_2 = 8 + i$

② $Z_1 + Z_2 = -2 - 5i$

ملاحظة: يجب التحويل الى صيغة Cortesian لكل مسائل الجمع والطرح

2- Product عملية ضرب الاعداد المركبة

if $Z_1 = X_1 + iy_1$, $Z_2 = X_2 + iy_2$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (X_1 + iy_1)(X_2 + iy_2)$$

$$= X_1 X_2 + iX_1 y_2 + iy_1 X_2 + i^2 y_1 y_2$$

ملاحظة دائما $i^2 = -1$

$$= (X_1 X_2 - y_1 y_2) + i(X_1 y_2 + y_1 X_2)$$

real ↑ imag ↑

ex: $Z_1 = 2+3i$, $Z_2 = 3-4i$

الحل

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2+3i)(3-4i)$$

$$= 6 - 8i + 9i - 12 i^2 \quad (i^2 = -1)$$

$$= 18 + i$$

قاعدة ex: * لضرب الاعداد المركبة بصيغة Polar تكون كالتالي:-

if $Z_1 = r_1 \angle \theta_1$, $Z_2 = r_2 \angle \theta_2$

Find $Z_1 \cdot Z_2$

الحل $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$

ex: if $Z_1 = \sqrt{2} \angle \pi/4$, $Z_2 = 2 \angle \pi$ Find $Z_1 \cdot Z_2$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2} \angle \pi/4 + \pi \Rightarrow = 2\sqrt{2} \angle 5\pi/4$$

3- قسمة الاعداد المركبة Divided

if $Z_1 = r_1 \angle \theta_1$ & $Z_2 = r_2 \angle \theta_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

ex: if $Z_1 = 3 \angle \pi/6$ & $Z_2 = \sqrt{3} \angle \pi$ Find $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{3} \angle \pi}{3 \angle \pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle \pi - \pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 5\pi/6$$

Ex:- IF $Z_1 = X_1 + iy_1$, $Z_2 = X_2 + iy_2$

Find $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1 + iy_1}{X_2 + iy_2}$ نضرب بالمرافق العددي

$= \frac{X_1 + iy_1}{X_2 + iy_2} \cdot \frac{X_2 - iy_2}{X_2 - iy_2} \Rightarrow \frac{X_1X_2 - iX_1y_2 + iy_1X_2 + y_1y_2}{X_2^2 - i^2y_2^2}$;

$= \frac{X_1X_2 + y_1y_2 + i(y_1X_2 - X_1y_2)}{X_2^2 + y_2^2}$

Ex ; IF $Z_1 = 3 - i$, $Z_2 = -2 + 4i$. Find $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3-i}{-2+4i} \Rightarrow$ نضرب بالمرافق العددي للمقام لتخلص من i في المقام

$= \frac{3-i}{-2+4i} \cdot \frac{-2-4i}{-2-4i} \Rightarrow \frac{-6-12i+2i+4i^2}{4-16i^2}$

$= \frac{-10-10i}{20}$

$= \frac{-10(1+i)}{20} \Rightarrow = -\frac{1}{2}(1+i)$