التفاضل Derivatives

المشتقة لها تفسيرين، وهذه تعتبر هندسي يتعلق بميل المماس عند نقطة المماس وتعتبر فيزياوي يتعلق بإيجاد السرعة من قانون المسافة او التعجيل من قانون المسافة او السرعة.

وتمثل الدالة رياضياً بخط بياني او مجموعة نقاط او معادلة رياضية ويرمز للدالة بالحرف f.

- التعريف العام لمشتقة الدالة.

$$F(x) = Y \quad \text{or} \quad Y = F(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X+\Delta X) - F(X)}{\Delta X}$$

مثال ١ / جد المشتقة باستخدام التعريف العام للمشتقة للدالة التالية.

$$Y = (X)^2 + 4$$

الحل

$$Y = F(X) = X^2 + 4$$

$$F(X+\Delta X) = (X+\Delta X)^2 + 4$$

$$\acute{F}(X) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X+\Delta X) - F(X)}{\Delta X} \quad \cdots\cdots$$

نعوض القيم اعلاه في المعادلة اعلاه

$$\acute{F}(X) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(X+\Delta X)^2 + 4 - (X^2+4)}{\Delta X}$$

$$= \frac{X^2 + 2X\cdot\Delta X + (\Delta X)^2 + 4 - X^2 - 4}{\Delta X}$$

$$= \frac{2X\cdot\Delta X + (\Delta X)^2}{\Delta X}$$

عامل مشترك

$$= \Delta X(2X + \Delta X)/\Delta X \qquad = 2X + \Delta X$$

$$\acute{F}(X) = \lim_{\Delta X \to 0} 2X + \Delta X$$

$$= 2X$$

مثال 2 / استخدم التعريف العام لمشتقة الدالة لايجاد مشتقة الدالة التالية
او/هـ المشتقة باستخدام تعريف الحايه

$$y = 6x$$

الحل

$$f x = 6(x$$

$$F(x+\Delta x) = 6(x+\Delta x)$$

القانون

$$F'(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{6(x+\Delta x) - 6x}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x + 6\Delta x - 6x}{\Delta x} = \frac{6 * \Delta x}{\Delta x} = 6$$

مثال 3 /

استخدم التعريف العام للمشتقة لايجاد ناتج المشتقة الدالة التالية

$$y = 1 - x^2$$

الحل

$$F(x) = 1 - x^2$$

$$F(x+\Delta x) = 1 - (x+\Delta x)^2$$

$$F'(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

مربع كامل ← حوس مهم

$$= \frac{1 - (x+\Delta x)^2 - (1 - x^2)}{\Delta x}$$

الاقواس

$$= \frac{1 - (x^2 + 2x*\Delta x + (\Delta x)^2) - 1 + x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{1 - x^2 - 2x*\Delta x - (\Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x}$$

$$= -2x*\Delta x - (\Delta x)^2 / \Delta x \quad \text{عامل مشترك} \quad = \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$F(x) \underset{\Delta x \to 0}{=} -2x - \Delta x \quad \text{بهز} \quad \boxed{= -2x}$$

مثال 4/ اوجد المشتقه باستخدام تعريف الطابه للدالة

$$y = \sqrt{x+1}$$

الحل $y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad F(x+\Delta x) = (x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}$$

مرافق عكسي

$$F'(x) = \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x} * \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x+\Delta x+1) - (x+1)}{\Delta x\left[(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\Delta x\left[(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$F'(x) \underset{\Delta x \to 0}{=} \frac{1}{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

بالتعويض $F'(x) = \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

٢ طريقة ثانية للحل

مثال / جد المشتق للدالة $y = x$ باستخدام التعريف العام .

الحل

$$y + \Delta y = x + \Delta x \quad \text{---} \quad (2)$$

(1) نطرح Δy للمتغير y
Δx للمتغير x

(3) نطرح المعادلة (2) من (1)
متغيرات بمقدار المعادلة الاصلية

$$-y = -x$$

بالطرح

$$\Delta y = \Delta x \quad \} \div \Delta x$$

(4) نقسم على Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

مثال /

جد المشتق للدالة $y = x^2$ باستخدام التعريف العام للمشتق

الحل

مربع كامل

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$-y = -x^2$$

بالطرح

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \quad \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$dx/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

مشتقة حاصل جمع اثنين

مثال / جد المشتق حسب تعريف النهاية للدالة $y = u + v$

الحل

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$-y = -u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v \quad \} \div \Delta x$$

$$\Delta y/\Delta x = \Delta u/\Delta x + \Delta v/\Delta x$$

$$dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u/\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v/\Delta x$$

$$= dy/dx = du/dx + dv/dx \implies \frac{dx}{dx} = u' + v'$$

مشتقة

مثال / اوجد المشتقه بطريقه تعريف النهايه للدالة التاليه:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f(x+\Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right)}{\Delta x}$$ توحيد المقامات

$$= \frac{\left(\frac{1\times x}{x(x+\Delta x)}\right) - \frac{1\times(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

الحل

$$y + \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x}$$

$$-y = -\frac{1}{x}$$ لاحظ اشارة السالب

بالطرح

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}$$ توحيد المقامات

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{1\times x}{(x+\Delta x)\times x} - \frac{1\times(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x\times\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$ ÷ Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{\Delta x}\times\Delta x}{x^2 + x\,\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{-1}{x^2+x\Delta x} = \frac{-1}{x^2+x(0)} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال / اوجد المشتقه بطريقه تعريف النهايه للدالة التاليه:

$$y = 3x + 2$$

الحل

$$y + \Delta y = 3(x+\Delta x) + 2$$

$$y + \Delta y = 3x + 3\Delta x + 2 \quad ---- (1)$$

$$-y = -3x + 2 \quad ---- (2)$$

بالطرح

$$\Delta y = 3\Delta x \quad] \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 3$$

$$dy/dx = 3$$

انواع الدوال :-

١- الدالة الجبرية ٢- الدالة اللوغارتمية ٣- الدالة المثلثية
٤- الدالة الاسية .

* مشتقة الدوال الجبرية :-

١- مشتقة الثابت = صفر

ex١:- $y = 3$

$$dy/dx = \dot{y} = \frac{d(3)}{dx} = 0$$

ex٢:- $y = c$

$$dy/dx = \dot{y} = 0$$

٢- مشتقة متغير مرفوع الى قوة (X^n) هو ($n X^{n-1}$)
(المرفوع اى الاس في المتغير ناقص ١ !!)

ex١:- $y = X^n$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = n X^{n-1}$$

ex٢:- $y = X^3$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = 3X^{3-1} = 3X^2$$

٣- مشتقة حاصل ضرب دالتين = (الاول * مشتقة الثاني + الثاني * مشتقة الاول)
(ثاني * مشتقة اول)

$$y = U * V$$

$$\dot{y} = U * \frac{d(v)}{dx} + V * \frac{du}{dx}$$

ex١- $y = 3X^2$

$$\dot{Y} = 3 * 2X^{2-1} + X^2 * 0$$

$$= 3 * 2X + 0$$

$$= 6X$$

٤- مشتقة حاصل جمع او طرح دالتين = مشتقة الاول ± مشتقة الثاني

$$y = u \pm v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Ex i- $y = x^2 - 6x + 2$ $\quad y' = 2x - 6 + 0 = 2x - 6$

Mul Suvo

٥- مشتقة حاصل ضرب ثابت في متغير = الثابت * مشتقة المتغير

$$y = cu$$

$$y' = c * u'$$

ex i- $y = 6x^2$

$$y' = 6 * 2x^{2-1}$$

$$= 6 * 2x$$

$$= 12x$$

٦- مشتقة حاصل قسمة دالتين =

$$\frac{\text{المقام} * \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} * \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}$$

ex i- $y = \frac{5}{x}$

$$y' = \frac{x * 0 - 5 * 1}{x^2} = \frac{0 - 5}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$$

٧- مشتقة كوس عدد او كوس دالة

مشتقة (دالة)$^{\text{اس}}$ = اس (دالة)$^{\text{اس}-1}$ * مشتقة داخل القوس

$$y = (u)^n \qquad y' = n u^{n-1} \times u'$$

Ex i- $y = (x^2 + 1)^3$

$$y' = 3(x^2+1)^{3-1} * 2x^{2-1} + 0$$

$$= 3 * 2x (x^2+1)^2$$

$$= 6x (x^2+1)^2$$

مشتقة x / مشتقة x هو 1

مثال: باستعمال $\frac{dy}{dx}$ أوجد

① $y = 3 \Longrightarrow y' = 0$

② $y = x^6 \Longrightarrow y' = 6x^5$

③ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

④ $y = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 6 \Longrightarrow y' = 12x^2 + 4x + 8$ (طريقة الجمع)

⑤ $y = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \Longrightarrow y' = -6x^{-3}$

$= \frac{x^2 \times 6 - 3 \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-6x}{x^4} = -6x^1 \times x^{-4} = -6x^{-3}$ أو

⑥ $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow y = x^{-\frac{1}{2}}$ (دالة مركبة)

$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

⑦ $y = 3.\sqrt{x}$ (طريقة الضرب)

$y' = 3 * \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{x} * 0$

$= \frac{3}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

⑧ $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (نوعي عدد مرفوع الى قوى)

$y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} * (0-2x^{2-1})$

$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$

$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

ملاحظة / لا $\frac{1}{x}$ او $\frac{4}{2x}$ لا تطبق عليه قانون القوة
الثابت ثابت فقط بدون الحاد اي اسبط وشتق

(9) $f(x) = x^6 + x^2$

$f'(x) = 6x^5 + 2x$

(10) $f(x) = 10 + \frac{2}{x^3} = 10 + 2x^{-3}$

$f'(x) = 0 + -3 * 2\,(x)^{-3-1}$

$= -6x^{-4}$

(10) $x = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 2$

$y = x^{\frac{1}{2}} - x^{-1} + 2$

$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$

(11) $F(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} * (1) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(12) $y = \frac{1}{x^{10}} - x^9 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= x^{-10} - x^9 - x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -10x^{-11} - 9x^8 + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

حاصل ضرب

(13) $y = 10x(x^2 + 4)$

$y' = 10x(2x) + (x^2+4) * 10$

$= 20x^2 + 10x^2 + 40$

$= 30x^2 + 40$

(14) مشتقة الضرب

$$y = (2x+3)(5+4x)$$

$$y' = (2x+3)(0+4) + (5+4x)(2+0)$$

$$= (2x+3)(4) + (5+4x)(2)$$

$$= 8x + 12 + 10 + 8x \quad = 16x + 22$$

(15)

ف١

$$f(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$$

ثاني × ثاني = ثاني — أول

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

حل ١- (H.W) واجب

في المشتقة dy/dx لكل مما يلي :-

(1) $y = x^2 - 8x + 5$

(2) $y = (x^2 - 4x + 3)^5$

(3) $y = \frac{6}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(4) $y = (2x-1)(5-4x)$

(5) $f(x) = (2 - 3x + x^2)^8$

(6) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

(7) $f(x) = (1+4x^3)(1+2x^2)$