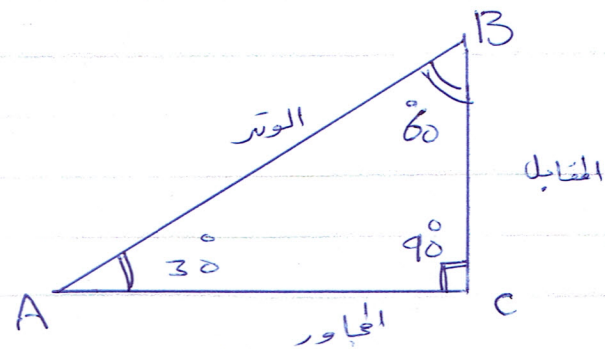
العلاقات المثلثية :-

- لكل مثلث ثلاث اضلاع وثلاث زوايا يكون على اشكال مختلفة بحيث يكون مجموع قياس زوايا المثلث 180°

* في المثلث القائم الزاوية هنالك ثلاث اضلاع هي المقابل ، المجاور والوتر لاحظ الشكل الاتي :-



جيب $\sin\theta = \frac{BC}{BA}$ وتر / مقابل

جيب تمام $\cos\theta = \frac{AC}{AB}$ الوتر / المجاور

ظل $\tan\theta = \frac{BC}{AC}$ المقابل / المجاور

ظل تمام $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{AC}{BC}$ ← مقلوب tan

$\sec = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{AB}{AC}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{BA}{BC}$

* قوانين مهمة في المثلثات .

1. $\sin\theta^2 + \cos\theta^2 = 1$
2. $1 + \tan\theta^2 = \sec\theta^2$
3. $1 + \cot\theta^2 = \csc$
4. $\csc\theta^2 - 1 = \cot^2\theta$

* قوانين جمع وطرح زاويتين والحفظ !!

① $\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y$

② $\cos(X \pm Y) = \cos X \cos Y \mp \sin X \sin Y$

③ $\tan(X+Y) = \dfrac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$

④ $\tan(X-Y) = \dfrac{\tan X - \tan Y}{1 + \tan X \tan Y}$

الزاوية	sin	cos	tan
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

مثال / جد قيم الزوايا التاليه وفق العلاقه المطلوبه .

① $\sin 75$ ② $\sin 15$

الحل

① $\sin 75 = \sin(45+30)$

$= \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2}$

$= 0.95$

② $\sin 15 = \sin(45-30)$

$= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2} = 0.25$

* صفر

③ $\cos 15 = \cos(45-30)$

$= \cos 45 . \cos 30 + \sin 45 \sin 30$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2} = 0.95$

④ $\tan 75 = \tan(45+30)$

$= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 * \tan 30}$

$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1) * \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + 0.57}{1 - 1 * 0.57} = 3.73$

* قوانين ضعف الزاويه لنسب المثلثيه :

① $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

② $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

③ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

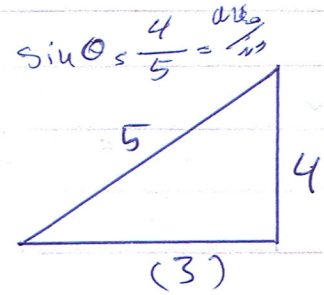
مثال / اذا علمت ان $\sin\theta = 4/5$ فجد :-

① $\sin 2\theta$ ② $\cos 2\theta$ ③ $\tan 2\theta$

dsl

① $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

$= 2 * 4/5 * 3/5 = \frac{24}{25} = 0.96$



② $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= (3/5)^2 - (4/5)^2 = 0.28$

③ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2(4/3)}{1 - (4/3)^2} = \frac{8/3}{1 - (16/9)} = \frac{2.6}{1 - (5.33)} = \frac{2.6}{-4.33} = -0.600$

المتطابقات المثلثية :-

- المتطابقة :- هي معادلة تحقق لجميع قيم المجموعة

مثال / برهن صحة المتطابقة التالية

$$\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}} = \tan\theta$$

الحل

$$L.H \sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}} = \sqrt{\frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}} = \frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$= R.H$$

مثال 2 / برهن صحة المتطابقة

$$\sin\theta\sqrt{\csc^2\theta - 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

الحل

$$L.H = \sin\theta\sqrt{\csc^2\theta - 1}$$

من القوانين المهمة، القانون الثالث $\csc^2\theta = 1+\cot^2\theta$

$\cot^2\theta = 1-\csc^2\theta$

$$= \sin\theta\sqrt{\cot^2\theta}$$

$$= \sin\theta\cot\theta$$

$$= \sin\theta * \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta$$

الناتج هو $\cos\theta$ وهو لا يساوي الطرف الأيمن R H

ثم نأخذ الطرف الثاني R H ونقارن لكل حل النتيجة السابقة " $\cos\theta$ "

$$R.H = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta}} = \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta = L.H$$

كما نرى

مثال 3/ برهن صحة المتطابقة التالية

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \csc\theta + \cot\theta$$

نضرب بالمرافق العددي

الحل

$$L.H = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$ ← نضرب ونعدل

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos^2\theta)}}$$ ← $\sin\theta^2 - \cos\theta^2 = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1 - \cos$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}} \Rightarrow = \frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \csc\theta + \cot\theta = R.H$$

مثال 4/ برهن صحة المتطابقة التالية.

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = 1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

الحل

$$L.H = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \times \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \rightarrow = \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta$$ ← $(1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

$$= 1 + \tan 2\theta$$

$$= 1 + \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = R.H$$