اللوغارتمات Log

- اللوغارتمات تعبر عن نفس مضمون الاسس ولاكن بأسلوب مختلف، ويستفاد منها في تسهيل العمليات الحسابية وفي رسم الدوال ويمكن تعريف اللوغارتم على انه كل عدد يمكن ان يوضع على شكل عدد اخر مرفوع الى قوة معينة كما في الحالات التالية:

$$4=2^2 \quad , \quad 8=2^3 \quad , \quad 16=2^4$$

$$\log_2 4=2 \quad , \quad \log_2 8=3 \quad , \quad \log_2 16=4$$

* بصورة عامة $\log_b X = a$

الاس = a

الاساس = b

العدد = X

- قوانين الاسس

1- عند ضرب العوامل المتشابهة نجمع الاسس

$$(y^2 x^2)(y x^3) = y^3 x^5$$

2- عند قسمة العوامل المتشابهة نطرح الاسس

$$\frac{y x^3}{y^2 x} = y^{-1} x^2$$

3- عند رفع الاساسات الى قوة نضرب الاسس بتلك القوة.

$$(x^2 y^3)^{\frac{1}{2}} = x^1 y^{\frac{3}{2}}$$

4- عند الجذر يقسم الاس الى دليل الجذر

$$\sqrt[3]{x^6 y^2} = x^{\frac{6}{3}} y^{\frac{2}{3}} = x^2 y^{\frac{2}{3}}$$

* هنالك نوعان من اللوغارتمات هما

1- اللوغارتمات الاعتيادية.

2- اللوغارتمات الطبيعية.

اولاً / اللوغارتمات الاعتيادية.

- اساسها 10 ويرمز لها بالرمز $\log X = \log_{10} X$ او $X = a^y$

$1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$

$10 = 10^1 \Rightarrow \log 10 = 1$

$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$

$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$

$0.1 = 10^{-1} \Rightarrow \log 0.1 = -1$

$0.01 = 10^{-2} \Rightarrow \log 0.01 = -2$

* الصيغة السابقة كتبت على اساس ان اس الاساس هو لوغارتم العدد الاصلي.

$X = 10^y$

$\log X = y$

ملاحظة /

- اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس.

ex/ $y = \log_{10} 100$

الجواب $\Rightarrow y = \log_{10} 100 = 2$

كيف؟ $\Rightarrow$ $X = a^y$ حسب القاعدة

$100 = 10^y$

$10^2 = 10^y \Rightarrow y = 2$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

ex $y = \log_{10} 0.001$

الجواب

$0.001 = 10^y$

$10^{-3} = 10^y \Rightarrow y = -3$

* هنالك لوغارتمات لاعداد مختلفة مثل :

① $8 = 2^3 \Rightarrow \log_2 8 = 3$

② $9 = 3^2 \Rightarrow \log_3 9 = 2$

③ $81 = 3^4 \Rightarrow \log_3 81 = 4$

④ $125 = 5^3 \Rightarrow \log_5 125 = 3$

مثال1 / جد قيم كل مما يأتي

① $\log_3 27$?

الجواب $\log_3 27 = X$ * نفرضها X

$27 = 3^X \Rightarrow 3^3 = 3^X \quad \therefore X = 3$

② $\log_2 16$?

الجواب $\log_2 16 = X$

$16 = 2^X \Rightarrow 2^4 = 2^X \quad \therefore X = 4$

③ $\log_{\sqrt{3}} 81$?

الجواب $\log_{\sqrt{3}} 81 = X$

$81 = (\sqrt{3})^X \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{2}X} \quad \therefore \frac{1}{2}X = 4 \Rightarrow X = 8$

مثال2 / اوجد قيمة X من المعادلة التالية

$\log_X 125 = 3$

الجواب $125 = X^3$

$5^3 = X^3 \Rightarrow X = 5$

قوانين اللوغارتمات

1) لوغارتم حاصل ضرب عددين = لوغارتم العدد الاول + لوغارتم العدد الثاني

$$\log_e (ab) = \log_e a + \log_e b$$

2) لوغارتم حاصل القسمة = لوغارتم العدد الاول - لوغارتم العدد الثاني

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

3) لوغارتم كمية مرفوعة الى اس = الاس X لوغارتم العدد

$$\log_c a^n = n \log_c a$$

4) لوغارتم الجذر = $\frac{1}{\text{دليل الجذر}}$ X لوغارتم العدد

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

ملاحظة 1 / لوغارتم عدد لنفس الاساس دائمًا يساوي (1) $\log_a a = 1$

ملاحظة 2 / لوغارتم (1) لاي اساس دائمًا يساوي صفر $\log_a 1 = 0$

مثال 1 / اثبت ان الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر للمعادلة اللوغارتمية التالية:

$$\log_4 35 + \log_4 33 + \log_4 12.8 - \log_4 30 - \log_4 7.7 = 3$$

الجواب

$$L.H = \log_4 35 + \log_4 33 + \log_4 12.8 \overset{\text{ملاحظة}}{-} \log_4 30 - \log_4 7.7$$

$$= \log_4 \frac{35 \times 33 \times 12.8}{30 \times 7.7}$$

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 \Longrightarrow 3 \log_4 4 = 3 \times \overset{\text{حسب الملاحظة}}{1} = 3 \quad R.H$$

مثال ٢/ اثبت ان الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر للمعادلة اللوغارتمية التالية :

$$\log 64 - 3\log 2 - 2\log 4 = \log \tfrac{1}{2}$$

الحل $L.H = \log 64 - 3\log 2 - 2\log 4$

$$= \log 64 - \overset{\text{حاصل ضرب}}{\downarrow} \log 2^3 - \log 4^2$$

$$= \log \frac{64}{8 \times 16}$$

$$= \log \tfrac{1}{2} = R.H$$

مثال 3/ اوجد حل المعادلة اللوغارتمية التالية :

$$\log_2\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = 2$$

الحل $\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = 2^2$

$$\left(\frac{1+X}{1-X}\right) \times \frac{4}{1}$$ نضرب طرفان في الوسطان

$$1+X = 4-4X \Longrightarrow X+4X = 4-1$$

$$5X = 3 \quad \therefore X = \frac{3}{5}$$

مثال ٤/ اوجد حل المعادلة اللوغارتمية التالية :

$$2\log_3 X - \log_3 (5-4X) = 0$$

الحل

$$\log_3 X^2 - \overset{\text{كسر}}{\downarrow} \log_3 (5-4X) = 0$$

$$\log_3 = \frac{X^2}{(5-4X)} = 0 \Longrightarrow \frac{X^2}{(5-4X)} = 3^0 = \frac{X^2}{5-4X} = 1$$

$$X^2 = 5-4X \Longrightarrow X^2 + 4X - 5 = 0$$ معادلة من الدرجة الثانية

$$(X+5)(X-1) = 0$$ اما $X+5 = 0 \Longrightarrow X = -5$

او $X-1 = 0 \Longrightarrow X = +1$

مثال 5/ اذا علمت ان $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.4$

جد قيمة :-

① $\log 6$

② $\log 54$

الحل ① $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3$

بالتعويض $= 0.3 + 0.4 = 0.7$

② $\log 54 = \log 9 \times 6$

$= \log 9 + \log 6$

$= \log 3^2 + \log 3 \times 2$

$= 2\log 3 + \log 3 + \log 2$

$= 2 \times 0.4 + 0.4 + 0.3$

$= 1.5$

مثال 6/ جد قيمة X لكل مما يأتي

① $\log_3 27 = X$ ② $\log_X 125 = 3$ ③ $\log_5 0.04 = X$

الحل

① $\log_3 27 = X$

$27 = 3^X \Rightarrow 3^3 = 3^X \quad \therefore X = 3$

② $\log_X 125 = 3$

$125 = X^3 \Rightarrow 5^3 = X^3 \quad \therefore X = 5$

③ $\log_5 0.04 = X$

$0.04 = 5^X$

$\frac{4}{100} = 5^X$

$\frac{1}{25} = 5^X$

$\frac{1}{5^2} = 5^X \Rightarrow 5^{-2} = 5^X \quad \therefore X = -2$

ثانياً / اللوغارتمات الطبيعية

- ويرمز لها بالرمز $\ln x$ او $\log_e x$ حيث ان e مقدار ثابت يساوي $e = 2.71$

قوانين اللوغارتمات الطبيعية :-

1) $\ln ab = \ln a + \ln b$

2) $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

3) $\ln a^n = n \ln a$

ملاحظة 1 / يتم التحويل من اللوغارتم الاعتيادي الى اللوغارتم الطبيعي باستخدام القانون التالي :-

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} \xrightarrow[\text{ناخذ ln للطرفين}]{\text{اثبات القانون}}$$

$$y = \log_b x$$

$$x = b^y$$

$$\ln x = \ln b^y \Rightarrow \ln x = y \ln b \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

ملاحظة 2 / يتم التحويل من اللوغارتم الطبيعي الى اللوغارتم الاعتيادي باستخدام القانون التالي :-

$$\ln x = 2.303 \log x$$

ملاحظة 3 / $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$

مثال 1 / جد بدون استخدام الحاسبة قيم كل مما يأتي ؟

1) $\ln(\tan 45)$? 2) $\sin(\ln 1)$ 3) $\cos(\ln 1)$

الحل

1) $\ln(\tan 45) = \ln(1) = 0$

2) $\sin(\ln 1) = \sin(0) = 0$

3) $\cos(\ln 1) = \cos(0) = 1$

مثال 2/ عبر عن الصيغ التالية بصيغ لوغارتم طبيعي ؟

① $\log_2 10$? ② $\log_3 25$? ③ $\log_y x$

الحل $\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$, $\dfrac{\ln 25}{\ln 2}$, $\dfrac{\ln x}{\ln y}$

مثال 3/ فكك كلاً من المعادلات التالية :-

① $y = 3\ln x$ ② $z = \ln\left(\dfrac{xy}{st}\right)$

الحل ① $y = 3\ln x$

$= \ln x^3$

② $z = \ln\left(\dfrac{xy}{st}\right)$

لماذا بالسالب؟

$= \ln x + \ln y - \ln s - \ln t$

اثبات الحل $\Rightarrow z = \ln(x * y * s^{-1} * t^{-1})$

$= \ln x + \ln y + \ln s^{-1} + \ln t^{-1}$

$= \ln x + \ln y - \ln s - \ln t$

مثال 4/ حل المعادلة التالية :-

$3\ln e = \ln xe$

الحل $\ln e^3 = \ln xe$

$e^3 = xe$

$x = \dfrac{e^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{e}}$ $x = e^2$

* الدالة الاسيه :- تمثل معكوس الدالة اللوغارتمية $y = e^{x}$

- خصائص الدالة الاسيه :-

① $e^{x-y} = e^{x} \cdot e^{y}$

② $y = \cancel{e}^{\ln x} = y = x$ — e مع ln تحذف ← نفس المعامل !

③ $y = e^{-\ln x}$ — لا يمكن حذف e مع ln لان معاملها يختلف وهو - فيجب التخلص من المعامل ثم تحذف .

$y = \cancel{e}^{\ln x^{-1}}$

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

مثال 6 / اوجد قيمه x للمعادلة اللوغارتمية التالية :-

$$5^{2\log_5 x} - (3)e^{\ln x} + 7^{\log_7 2} = 0$$

<u>الحل</u>

$$\cancel{5}^{\log_5 x^2} - (3)\cancel{e}^{\ln x} + \cancel{7}^{\log_7 2} = 0$$

ملاحظة /

* 5 مع $\log_5$ تحذف لانه يساوي ١

* e مع ln تحذف " " "

* 7 مع $\log_7$ تحذف " " "

معادلة من الدرجة الثانية

$$\Rightarrow = x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)\ (x-2)$$

اما $(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$

او $(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$