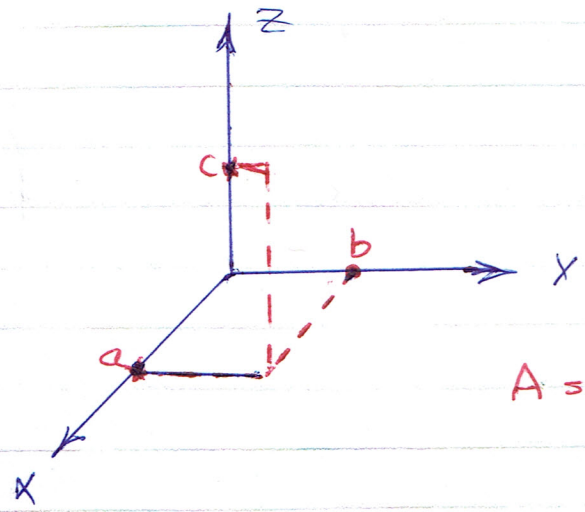
Vectors المتجهات

الكميات العددية :- هي الكميات التي تحتاج لكي تحدد مقدارها فقط مثل : الكتلة ، الزمن ، المسافة ، درجة الحرارة .

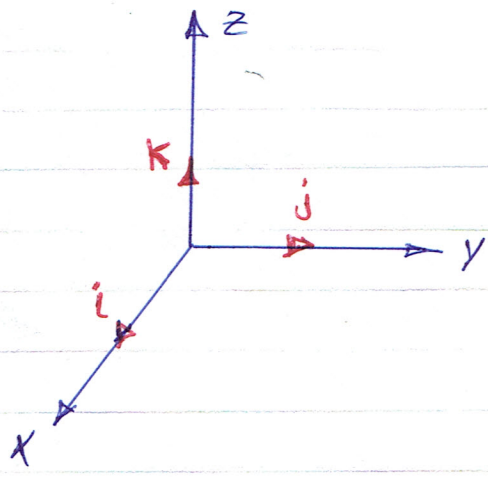
الكميات الاتجاهية :- هي الكميات التي تحتاج لكي تحدد مقدارها واتجاهها مثل : السرعة ، الازاحة ، العزم .

* في الفضاء الخارجي يمكن تمثيل اية نقطة ولتكن نقطة A مثلاً بثلاثة ابعاد a, b, c على المحاور X, Y, Z .



$$A = (a, b, c) = ai + bj + ck$$

تتجه الوحدة :- وهو متجه طوله وحدة واحدة



$$A = (1, 0, 0) = i$$
$$B = (0, 1, 0) = j$$
$$C = (0, 0, 1) = K$$

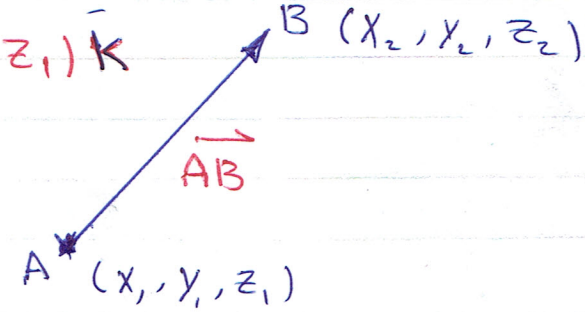
i ← هو متجه الوحدة باتجاه X

k ← هو متجه الوحدة باتجاه Z

j ← هو متجه الوحدة باتجاه Y

* لحساب المتجه الخارج من نقطة A الى نقطة B نستخدم القاعدة التالية

$$\overrightarrow{AB} = (X_2 - X_1)\bar{i} + (Y_2 - Y_1)\bar{j} + (Z_2 - Z_1)\bar{k}$$



مثال 1/ جد المتجه الخارج من نقطة A الى نقطة B اذا كانت

$A = (2, 4, -1)$

$B = (-3, 0, 5)$

الحل

$$\vec{AB} = (-3-2)\bar{i} + (0-4)\bar{j} + (5-(-1))\bar{k}$$

$$\vec{AB} = -5\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}$$

$$\therefore \vec{AB}\ (-5, -4, 6)$$

مثال 2/

① حول النقطة التالية الى متجه $A = (2, 3, 1)$

الحل $\rightarrow$ $\vec{A} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$

② حول النقطة التالية الى متجه $N = (1, 0, 1)$

الحل $\rightarrow$ $\vec{N} = \bar{i} + \bar{k}$

Unit Vector

كما ان وحدة المتجه والذي يسمى Unit Vector الخارج من نقطة A الى B نستخدم القانون التالي:-

$$\vec{U}_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

المتجه

طول المتجه

ويمكن ايجاد طول المتجه من القانون التالي:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

نطرح ثم نأخذ الجذر ثم نجمع

مثال 3/ جد وحدة المتجه $\vec{AB} = (-5, -4, 6)$

الحل

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{77}$$

$25 + 16 + 36$

$$\vec{U}_{\vec{AB}} = \frac{-5\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}}{\sqrt{77}}$$

* ملاحظة :- يكون طول كل من ((i, j, k)) يساوي واحد حسب تطبيق القانون

$$|\vec{i}| = \sqrt{1+0+0} = 1$$
$$|\vec{j}| = \sqrt{0+1+0} = 1$$
$$|\vec{k}| = \sqrt{0+0+1} = 1$$

" تطبيقات على المتجهات "

اولاً / جمع المتجهات

- لو كان لدينا متجهان

$$\vec{A} = (X_1, Y_1, Z_1)$$
$$\vec{B} = (X_2, Y_2, Z_2)$$

فان جمع المتجهين يكون كالاتي :-

$$\vec{A}+\vec{B} = (X_1+X_2)\bar{i} + (Y_1+Y_2)\bar{j} + (Z_1+Z_2)\bar{k}$$

ex:- $\vec{A} = (2, -1, 4)$
$\vec{B} = (-1, 5, 3)$
Find $A+B$

الحل

$$\vec{A}+\vec{B} = (2+(-1))\bar{i} + (-1+5)\bar{j} + (4+3)\bar{k}$$
$$\vec{A}+\vec{B} = i + 4j + 7k \Rightarrow \therefore \vec{A}-\vec{B} = (1, 4, 7)$$

ثانياً / طرح المتجهات

* عملية طرح المتجهات نفس الخطوات السابقة مع تغيير الاشارة من الجمع الى الطرح

$$\vec{A}-\vec{B} = (X_1-X_2)\bar{i} + (Y_1-Y_2)\bar{j} + (Z_1-Z_2)\bar{k}$$

ex: $\vec{A} = (2, -1, 4)$
$\vec{B} = (-1, 5, 3)$

Find $\vec{A}-\vec{B}$

الحل

$$\vec{A}-\vec{B} = (2-(-1))\bar{i} + (-1-5)\bar{j} + (4-3)\bar{k}$$
$$= 3i - 6j + k \Rightarrow \vec{A}-\vec{B} = (3, -6, 1)$$

ثالثاً / ضرب المتجهات " Product of Vector "

① الضرب بعدد ثابت

- نفرض المتجه $\vec{A} = X i + Y j + Z k$ والعدد الثابت C

$$\vec{A} \cdot C = CX i + CY j + CZ k$$

مثال / اذا كان لدينا المتجه $\vec{A} = 3i - 4j + 5k$ والعدد الثابت $C = 2$

جد ا- $C.A$ او $2A$

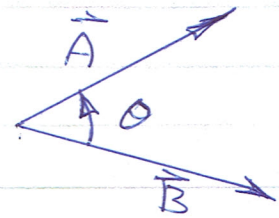
الحل

$$2.A = 2(3i - 4j + 5k)$$
$$= 9i - 8j + 10k$$

② الضرب النقطي " Dot product " ⟸ " Scalar " كمية وليس متجه

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

طول A = طول B =



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|\,|\vec{i}| \cos 0$$ ← لان الزاوية بين i و i هي صفر

نفرض طول وحدة واحد = 1

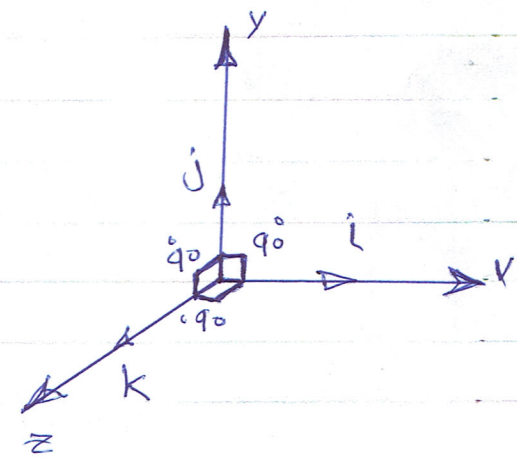
$$= 1 \cdot 1 \quad 1$$

$$\therefore \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |i|\,|j| \cos 90$$ ← لان الزاوية بين i و j هي 90 من الرسم

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= 0$$

$$\therefore i \cdot j = 0$$
$$j \cdot k = 0$$
$$k \cdot i = 0$$



$\vec{A} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k})$ * طريقة ثانية

$\vec{B} = (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$

$\vec{A}.\vec{B} = (a_1 b_1 \underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{\text{zero}} + a_1 b_3 \underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{\text{zero}}) + (a_2 b_1 \underbrace{\vec{j}.\vec{i}}_{\text{zero}} + a_2 b_2 \underbrace{\vec{j}.\vec{j}}_{1} + a_2 b_3 \underbrace{\vec{j}.\vec{k}}_{\text{zero}}) + (a_3 b_1 \underbrace{\vec{k}.\vec{i}}_{\text{zero}} + a_3 b_2 \underbrace{\vec{k}.\vec{j}}_{\text{zero}} + a_3 b_3 \underbrace{\vec{k}.\vec{k}}_{1})$

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ⟸ ناتج الضرب النقطي

ex: $\vec{A} = (3, -1, 5)$

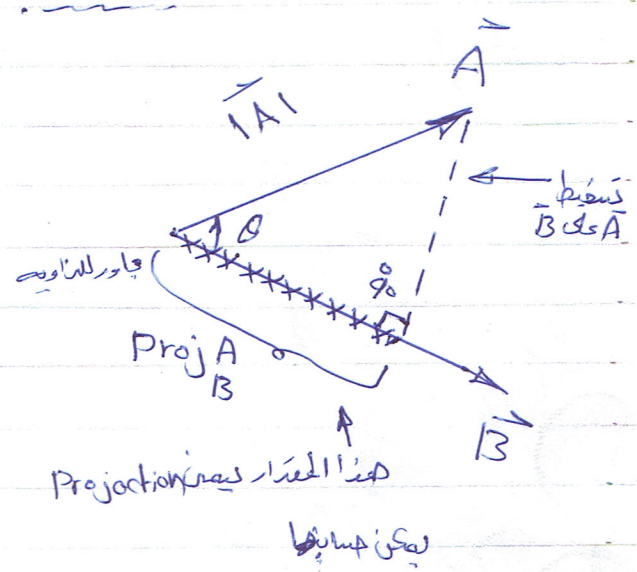
$\vec{B} = (-2, 6, 4)$ Find $\vec{A}.\vec{B}$

الحل ⟹ $\vec{A}.\vec{B} = -6 - 6 + 20$

$= 8$

---

* Projection المساقط



$\cos\theta = \dfrac{\text{Proj}_{\vec{B}}\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$\text{Proj}_{\vec{B}}\vec{A} = |\vec{A}| \cos\theta$

* نضرب ونقسم على طول المتجه $\vec{B}$

$\text{Proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \dfrac{|\vec{A}|.|\vec{B}| \cos\theta}{|\vec{B}|}$

$\therefore \text{Proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$\text{Proj}_{\vec{A}}\vec{B} = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$

**

ex/ $\vec{A} = (3, -1, 2)$

$\vec{B} = (-1, 0, 3)$ Find ① $proj_B^A$, ② $proj_A^B$

Sol

$|\vec{A}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$|\vec{B}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$A \cdot B = -3 + 0 + 6 = 3$

$\therefore proj_B^A = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$proj_A^B = \frac{3}{\sqrt{14}}$

if $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Longrightarrow$ Then $\vec{A} \perp B$

* $A \cdot B$ اذا كانت تساوي صفر فهذا يعني ان الزاويه بينهما تساوي $90°$ اي انهما عموديان على بعضهما ولانه $\cos 90$ يساوي صفر

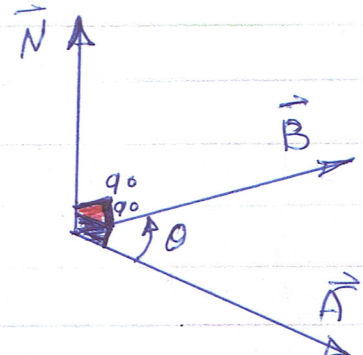
$A \cdot B = |A|\,|B| \cos 90$

$= |A|\,|B|\, 0$

$A \cdot B = 0$

③ الضرب الاتجاهي "Cross product" $\Longleftarrow$ "اتجاهي Vector"

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = n\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta}$$



$\vec{N} \perp \vec{A}$, $\vec{N} \perp \vec{B}$

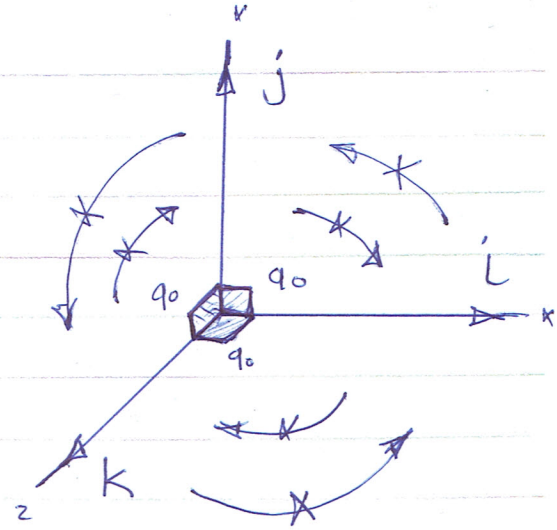
$i \times i = n\,|\vec{i}|\,|\vec{i}| \sin 0$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot zero = 0$

$\therefore i \times i = 0$, $K \times K = 0$

$j \times j = 0$

* عندما نقول حاصل ضرب A باتجاه B باستخدام قاعدة اليد اليمنى ينتج مكعب جديد هو N عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$



المتجه العمودي n

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = K\,|\bar{A}|\,|\bar{j}|\,\sin 90$$
$$= K\ 1\cdot 1\cdot 1$$

عكس عقرب الساعة

$$\therefore\ \begin{cases} i\times j = k \\ j\times k = i \\ k\times i = j \end{cases}$$

i باتجاه j يعطي k العمودي عليهما

مع عقرب الساعة

$$\begin{cases} k\times j = -i \\ j\times i = -k \\ i\times k = -j \end{cases}$$

نكمله

نوفرضنا

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$
$$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$A\times B = (a_1 \cancel{b_1 i\cdot i}^{0} + a_1 b_2 i\cdot j + a_1 b_3 i\cdot k) + (a_2 b_1 j\cdot i + a_2 \cancel{b_2 j\cdot j}^{0} + a_2 b_3 j\cdot k) + (a_3 b_1 k i + a_3 b_2 k j + a_3 \cancel{b_3 k\cdot k}^{0})$$

$$A\times B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \end{array} \\ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

محددة

$$= a_1 b_2 \underbrace{i\cdot j}_{=k} + a_1 b_3 \underbrace{i\cdot k}_{=-j} + a_2 b_3 \underbrace{j\cdot k}_{=i} + a_3 b_1 \underbrace{k\cdot i}_{=j} + a_3 b_2 \underbrace{k\cdot j}_{-i} + a_2 b_1 \underbrace{j\cdot i}_{-k}$$

حسب الاشارات المحددة

$$\therefore\ = {}^{+}i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

وهذا القانون هو نفس المحددات

مثال / اذا كان $\bar{A} = (2,0,-1)$ و $\bar{B} = (-3,4,5)$ جد $A\times B$ المتجه العمودي على A و B

الجواب

$$\bar{A} = 2i - k \quad , \quad B = -3i + 4j + 5k$$

$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= {}^{+}i(4) - j(7) + k(8) \qquad = 4i - 7j + 8k$$
$$= (4, -7, 8)$$

* لايجاد المساحة بين متجهين نطبق القانون التالي

$$\text{Area between } \bar{A} \,\&\, \bar{B} = |A\times B|$$

طول المتجه الناتج من $A\times B$

لايجاد المساحة للمثال السابق:-

$$\text{Area} = \sqrt{16 + 49 + 64} = \sqrt{129}$$

* حساب قيمة الزاوية بين متجهين .

- لتعرف حساب الزاوية المحصورة بين متجهين نطبق الخطوات التالية :

١- نحسب طول المتجه $|\vec{A}|$ عن طريق القانون الآتي :

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$ ← بدون رسم

٢- نحسب طول المتجه $|\vec{B}|$ عن طريق القانون الآتي :

$$|\vec{B}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$ ← بدون رسم

٣- نحسب $\vec{A}\cdot\vec{B}$ كما تم شرحه سابقاً

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

النتائج لا يدون الحل فقط رقم !!

٤- نطبق القانون الآتي لإيجاد الزاوية

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

مثال 1 / اذا كان : $\vec{B} = j - k$ ، $\vec{A} = -i + j$ احسب الزاوية بين المتجهين

الحل

$$\vec{A} = -i + j + 0k$$
$$\vec{B} = 0i + j - k$$

- نحسب طول المتجه $\vec{A}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

- نحسب طول المتجه $\vec{B}$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

- نحسب $\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -1(0) + 1(1) + 0(-1) = 1$$

- نحسب الزاوية من القانون التالي :

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

واجب

مثال 3 / اذا كان :-

$\vec{A} = 3j - 4k$

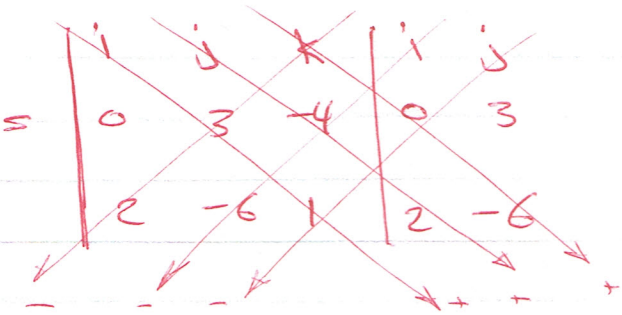
$\vec{B} = 2i - 6j + k$

1- $\vec{A} \times \vec{B}$

2- $\vec{B} \times \vec{A}$

الحل

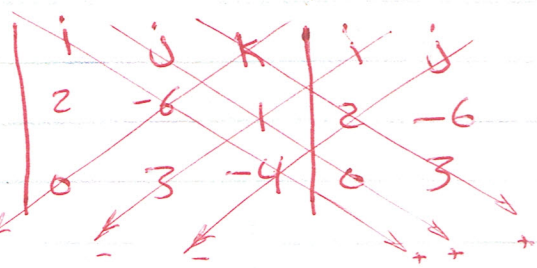
1- $\vec{A} \times \vec{B}$ =



$\vec{A} \times \vec{B} = 3i - 8j - 0k - 6K - 24i - 0j$

$= -21i - 8j - 6k$

2- $\vec{B} \times \vec{A}$ =



$\vec{B} \times \vec{A} = 24i + 0j + 6k - 0k - 3i + 8j$

$= 21i + 8j + 6k$

ملاحظة 1 / $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$

ملاحظة 2 / اذا كان $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ فان $\vec{A}$ عمودي على $\vec{B}$ او بالعكس $\vec{A} \perp \vec{B}$ يعني

مثال / اذا كان لدينا

$\vec{A} = 2i - 3j + 2k$

$\vec{B} = 3i + 2j$

اثبت ان $\vec{A}$ عمودي على $\vec{B}$

الحل

لكي يكون $\vec{A} \perp \vec{B}$ يجب ان تكون $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ وفقاً للقاعدة الرياضية

$\vec{A} = 2i + 3j + 2k$

$\vec{B} = 3i + 2j + 0k$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2(3) - 3(2) + 2(0) = 6 - 6 + 0 = 0$

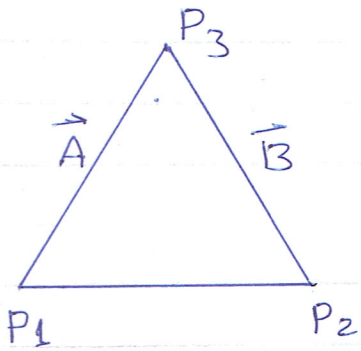
$\therefore \vec{A} \perp \vec{B}$

* لحساب مساحة المثلث نطبق القانون الاتي :-

$$A = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

مثال / احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط التاليه :-

$P_1(2,4)$ ، $P_2(-2,4)$ ، $P_3(0,0)$



الجواب

$$\vec{A} = \overrightarrow{P_3P_1} = P_1 - P_3$$

$$= (2-0)i + (4-0)j$$

$$\therefore \vec{A} = 2i + 4j + 0k$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{P_3P_2} = P_2 - P_3$$

$$= (-2-0)i + (4-0)j$$

$$\therefore \vec{B} = -2i + 4j + 0k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} (+)i & (-)j & (+)k \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

(zero) (zero)

$$= k(2\times4 - 4\times-2) \quad \text{أو} \quad = (8+8)k = 16k$$

$$A \times B = 16k$$

$$|A \times B| = \sqrt{(16)^2} = 16$$

$$A. = |A \times B| / 2$$

$$= 16/2$$

$$\text{Area} = 8$$

مثال /

اذا كان

$$\vec{A} = 3j - 4k$$
$$\vec{B} = 2i - 6j + k$$

جد كلا مما يلي :-

① $\vec{A} \times \vec{B}$ ② $\vec{B} \times \vec{A}$ ③ $\vec{A} \cdot (\overrightarrow{A \times B})$

الجواب

① $\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

$= -21i - 8j - 6k$

② $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= 21i + 8j + 6k$

③ $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$\vec{A} = 3j - 4k$

$\bar{A} \times \vec{B} = -21i - 8j - 6k$

$A \cdot (A \times B) = (-21 \times 0) + (3 \times -8) + (-4 \times -6)$

$= -24 + 24 = 0$ $\therefore \vec{A} \perp (\vec{B} \times \vec{A})$

ملاحظات مهمة

① $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

② $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$