رابعاً/ مشتق الدالة الاسية Exponential Function

1 :- مشتقة الدالة الاسية بصيغة $e^x$

قاعدة مشتقة الدالة الاسية بصيغة $e^x$ :-

① $y = e^x$

$dy/dx = e^x$

② $y = e^u$

$dy/dx = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

ملاحظة $(e^x)^2 = e^x \cdot e^x \Rightarrow e^{2x}$

أمثلة تطبيقية :-

ex1 :- $y = e^{5x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{5x}(5) = 5e^{5x}$

ex2 :- $y = x^2 e^x$

$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x + e^x(2x) = x^2 e^x + 2x e^x$

ex3 :- $y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ الحل $\Rightarrow y = \ln e^x - \ln(1+e^x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{e^x}} \cdot \cancel{e^x} - \frac{1}{(1+e^x)} e^x = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)}$

ex4 :- $y = 4e^{\sin x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 4e^{\sin x^2} \cdot (\cos x)(2x) = 8x\, e^{\sin x^2} \cdot \cos x$

ex5 :- $y = e^x + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = e^x + \frac{1}{x}$

ex6:- $y = e^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cdot \cos x \, (1) = e^{\sin x} \cos x$$

ex7:- $y = \sin(e^{2x})$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(e^{2x}) \cdot e^{2x}(2) = 2e^{2x} \cdot \cos(e^{2x})$$

ex8:- $y = e^{2x^2-3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x^2-3} \cdot 4x$$

ex9:- $y = e^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

ex10:- $y = e^{\cos x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$$

e11:- $y = e^{ax^2} \cdot \sin(ax)$ * مشتقة حاصل الضرب والقسمة

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax^2} \cdot [\cos(ax) \cdot a] + \sin(ax) \cdot [e^{ax^2} \cdot 2ax]$$

$$= a \cdot e^{ax^2} \cdot \cos(ax) + 2ax \cdot e^{ax^2} \cdot \sin(ax)$$

2- مشتقة الدالة الاسية بصيغة $a^x$

القاعدة ←

$$y = a^{x}$$
$$y' = a^{x} \ln a \cdot \frac{dy}{dx}$$

امثلة تطبيقية :-

ex1 :- $y = 2^{x}$

$$y' = 2^{x} \ln 2 \,(1) \quad = 2^{x} \ln 2$$

ex2 :- $y = 2^{\sin x}$

$$y' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

ex3 :- $y = 10^{\ln x}$

$$y' = 10^{\ln x} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{x}$$

---

* مشتقة متغير مرفوع الى اس (متغير)

$$y = u^{v}$$

القاعدة :- 1- ناخذ ln الطرفين

$$\ln y = \ln u^{v}$$
$$\ln y = \underbrace{v}_{\text{الاول}} \, \underbrace{\ln u^{v}}_{\text{الثاني}}$$

2- نشتق الطرفين

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' + \ln u \cdot v'$$
$$y' = y \left[ \frac{u'}{u} + v' \ln u \right]$$

تعويض قيمة y بالسؤال

- امثلة تطبيقية :-

ex1 : $y = x^{x}$

الحل (1) ماخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln y = \ln x^{x} \Longrightarrow \ln y = x \ln x$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

(2) نشتق

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \ln x \cdot 1$$
$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x$$
$$y' = y[1 + \ln x] \Longrightarrow \text{تعويض قيمة } y \quad y' = x[1 + \ln x]$$

ex 2 :- $y = (\sin x)^x$

ادخل $\rightarrow \ln y = \ln (\sin x)^x$

$\ln y = x \ln (\sin x)$ الطرف الايمن هو مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\frac{1}{y} * y' = x \cdot \frac{1}{\sin x} (\cos x) + \ln \sin x \,(1)$$

$$y' = y \left[ \frac{x \cos x}{\sin x} + \ln \sin x \right]$$

$$y' = (\sin x)^x * \left[ x \cot x + \ln \sin x \right]$$

ex 3 :- $y = (x^2+1)^{\sin x}$

ادخل $\Longrightarrow \ln y = \ln (x^2+1)^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \ln (x^2+1)$$

$$\frac{1}{y} * y' = \sin x \cdot \frac{1}{x^2+1} * (2x) + \ln (x^2+1) \cdot \cos x$$

$$\frac{y'}{y} = \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \ln (x^2+1) \cdot \cos x$$

$$y' = y \left[ \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \ln (x^2+1) \cdot \cos x \right.$$

$$y' = (x^2+1)^{\sin x} \cdot \left[ \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \ln (x^2+1) \cdot \cos x \right]$$

* مشتقة دالة الدالة ( الدالة المركبة ) " قاعدة السلسلة " chain rule

القاعدة :- ١- اذا كان لدينا $y = F(u) \quad , \quad u = f(x)$

فان $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

٢- اذا كان لدينا $y = F(u) \quad , \quad x = F(u)$

فان $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

أمثلة تطبيقية :- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي :-

ex1 $y = u^2 + 5 \quad , \quad u = x$

الحل $\frac{dy}{du} = 2u \qquad \frac{du}{dx} = 1$

القاعدة $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \times (1) \xRightarrow{\text{نعوض قيمة } u} = 2x$

ex2 :-

$y = \sin 2t \quad , \quad t = \cos x$

الحل $\frac{dy}{dt} = \cos 2t\,(2) \quad , \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 2\cos 2t \cdot (-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cdot \cos 2t$$

نعوض قيمة $t$ $= -2\sin x \cdot \cos 2(\cos x)$

ex:-3/ $y = \ln(e^{u^3})$ , $u = \sin(\ln x^2)$

الحل $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{\cancel{e^{u^3}}} \cdot \cancel{e^{u^3}} \cdot 3u^{3-1}$ , $\dfrac{du}{dx} = \cos(\ln x^2) * \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x$

$= 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot \cos(\ln x^2) * \frac{2x}{x^2}$$

ex 4

$y = z^{\frac{2}{3}}$ , $x = z^2 + 1$

الحل $\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}}$ , $\dfrac{dx}{dz} = 2z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{\cancel{2}}{3} z^{-\frac{1}{3}}}{\cancel{2} z}$$

$= \dfrac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}}$ $\xRightarrow{\text{بالتعويض}}$ $x = z^2 + 1$

$z^2 = x - 1 \Rightarrow z = \sqrt{(x-1)}$

$\therefore = \dfrac{1}{3}(\sqrt{x-1})^{-\frac{4}{3}}$

ex5 $y = u^2 + 4$ , $u = \sqrt{x}$

الحل $\dfrac{dy}{du} = 2u$ , $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{2}u \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$= u \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= (\sqrt{x}) \cdot x^{-\frac{1}{2}}$