التفاضل Derivatives

المشتقة لها تفسيرين، وصف هندسي يتعلق بميل المماس عند نقطة المنحنى ومعنى فيزيائي يتعلق بإيجاد السرعة من قانون المسافة او التعجيل من قانون المسافة او السرعة.

وتمثل الدالة رياضيا بخط بياني او مجموعة نقاط او معادلة رياضية ويرمز للدالة بالحالات.

- التعريف العام لمشتقة الدالة.

$F(x) = Y$ or $Y = F(x)$

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X+\Delta X) - F(X)}{\Delta X}$$

مثال ١ / جد المشتقة باستخدام التعريف العام للمشتقة للدالة التالية ..

$$Y = X^2 + 4$$

الحل

$$Y = F(x) = X^2 + 4$$

$$F(X+\Delta X) = (X+\Delta X)^2 + 4$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X+\Delta X) - F(X)}{\Delta X} \quad \text{.....}$$

نعوض القيم اعلاة في المعادلة اعلا

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(X+\Delta X)^2 + 4 - (X^2+4)}{\Delta X}$$

نفك القوس

$$= \frac{X^2 + 2X * \Delta X + (\Delta X)^2 + 4 - X^2 - 4}{\Delta X}$$

$$= \frac{2X * \Delta X + (\Delta X)^2}{\Delta X}$$

نأخذ عامل مشترك

$$= \Delta X (2X + \Delta X) / \Delta X \qquad = 2X + \Delta X$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta X \to 0} 2X + \Delta X$$

$$= 2X$$

مثال 2 / استخدم التعريف العام لمشتقة الدالة لايجاد مشتقة الدالة التالية
او/جد المشتقة باستخدام تعريف الحايه

$$y = 6x$$

الحل

$$f(x) = 6x$$

$$f(x+\Delta x) = 6(x+\Delta x)$$

القانون

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{6(x+\Delta x) - 6x}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x + 6\Delta x - 6x}{\Delta x} = \frac{6 * \Delta x}{\Delta x} = 6$$

مثال 3 /

استخدم التعريف العام للمشتقة لايجاد ناتج المشتقة الدالة التالية

$$y = 1 - x^2$$

الحل

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$f(x+\Delta x) = 1 - (x - \Delta x)^2$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1 - (x - \Delta x)^2 - (1 - x^2)}{\Delta x}$$

(مربع كامل) (حرس مهم)

$$= \frac{1 - (x^2 + 2x * \Delta x + (\Delta x)^2) - 1 + x^2}{\Delta x}$$

(الاشارة)

$$= \frac{1 - x^2 - 2x * \Delta x - (\Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x}$$

$$= -2x * \Delta x - (\Delta x)^2 / \Delta x \quad \text{(عامل مشترك)} \quad = \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = -2x - \Delta x \quad \text{(صفر)}$$

$$\Delta x \to$$

$$= -2x$$

مثال 4/ اوجد المشتقه باستخدام تعريف الدالة

$$y = \sqrt{x+1}$$

الحل

$$y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad F(x+\Delta x) = (x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$ ← عوافق كمدكي

$$F'(x) = \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x} * \frac{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x+\Delta x+1) - (x+1)}{\Delta x\left[(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\Delta x\left[(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$F'(x) \underset{\Delta x \to 0}{=} \frac{1}{(x+\Delta x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

بالتعويض $F'(x) = \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{2}}$

$$= \frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

٢/ طريقة ثانية للحل ٧

مثال / جد المشتق للدالة $y = x$ باستخدام التعريف العام .

الحل

① نضيف Δy للمتغير y
Δx للمتغير x

② نطرح المعادلة ١ من الثانية
فيتغير المقدار المعادلة الاصلية

③ نقسم على Δx

$$y + \Delta y = x + \Delta x \quad \text{---} \quad ②$$
$$-y = -x \quad \text{---} \quad ①$$
بالطرح
$$\Delta y = \Delta x \quad \} \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

مثال /

جد المشتق للدالة $y = x^2$ باستخدام التعريف العام للمشتق

الحل

(مربع كامل)
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$-y = -x^2$$
بالطرح
$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$dx/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$
$$= 2x + 0 = 2x$$

مشتق حاصل ضرب اثنين

مثال / جد المشتق حسب تعريف الحاصل للدالة $y = u + v$

الحل
$$y + \Delta y = u + \Delta y + v + \Delta v$$
$$-y = -u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v \quad \} \div \Delta x$$
$$\Delta y/\Delta x = \Delta u/\Delta x + \Delta v/\Delta x$$
$$dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u/\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v/\Delta x$$
$$= dy/dx = du/dx + dv/dx \longrightarrow \frac{dx}{dx} = u' + v'$$
مشتق *

مثال / اوجد المشتقه بطريقه تعريف الغايه للدالة التاليه:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f(x+\Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right)}{\Delta x}$$ توحيد المقامات

$$= \frac{\left(\frac{1\times x}{x(x+\Delta x)}\right) - \frac{1\times(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

توحيد مقامات

الحل

$$y + \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$ لاحظ اشارة

بالطرح

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}$$ توحيد المقامات

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{1\times x}{(x+\Delta x)\times x} - \frac{1\times(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x\times\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$ ÷ Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{\Delta x}\times \cancel{\Delta x}}{x^2 + x\,\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{-1}{x^2+x\Delta x} = \frac{-1}{x^2+x(0)} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال / اوجد المشتقه بطريقه تعريف الغايه للدالة التاليه:

$$y = 3x + 2$$

الحل

$$y + \Delta y = 3(x+\Delta x) + 2$$

$$y + \Delta y = 3x + 3\Delta x + 2 \quad ---- (1)$$

$$-y = -3x + 2 \quad ---- (2)$$

بالطرح

$$\Delta y = 3\Delta x \quad] \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 3$$

$$dy/dx = 3$$

انواع الدوال :-

١- الدالة الجبرية ٢- الدالة المثلثية ٣- الدالة اللوغارتمية
٤- الدالة الاسية.

* مشتقة الدوال الجبرية :-

١- مشتقة الثابت = صفر

ex١:- $y = 3$

$$dy/dx = \dot{y} = \frac{d(3)}{dx} = 0$$

ex٢:- $y = c$

$$dy/dx = \dot{y} = 0$$

٢- مشتقة متغير مرفوع الى قوة (X^n) هو ($n X^{n-1}$)
(المرفوع اى الاس في المتغير ناقص ١ !!)

ex١:- $y = X^n$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = n X^{n-1}$$

ex٢:- $y = X^3$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = 3X^{3-1} = 3X^2$$

٣- مشتقة حاصل ضرب دالتين = (الاول * مشتقة الثاني + الثاني * مشتقة الاول)
(الاول = U ، الثاني = V)

$$y = U * V$$

$$\dot{y} = U * \frac{d(v)}{dx} + V * \frac{du}{dx}$$

ex١- $y = 3X^2$

$$\dot{y} = 3 * 2X^{2-1} + X^2 * 0$$

(صفر)

$$= 3 * 2X + 0$$

$$= 6X$$

٤- مشتقة حاصل جمع او طرح دالتين = مشتقة الاول ± مشتقة الثاني

$$y = u \pm v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Ex i- $y = x^2 - 6x + 2$ $\quad y' = 2x - 6 + 0 = 2x - 6$

Hint sum / $\frac{d}{dx}$

٥- مشتقة حاصل ضرب ثابت في متغير = الثابت * مشتقة المتغير

$$y = Cu$$

$$y' = C * u'$$

ex i- $y = 6x^2$

$$y' = 6 * 2x^{2-1}$$

$$= 6 * 2x$$

$$= 12x$$

٦- مشتقة حاصل قسمة دالتين =

$$\frac{\text{المقام} * \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} * \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}$$

ex i- $y = \frac{5}{x}$

$$y' = \frac{x * 0 - 5 * 1}{x^2} = \frac{0 - 5}{x^2} = \frac{-5}{x^2}$$

٧- مشتقة كوس او جا او ظا او قتا

مشتقة (دالة)$^{\text{اس}}$ = اس (دالة)$^{\text{اس - ١}}$ * مشتقة داخل القوس

$$y = (u)^n$$

$$y' = n u^{n-1} * u'$$

Ex i- $y = (x^2 + 1)^3$

$$y' = 3(x^2+1)^{3-1} * 2x^{2-1} + 0$$

$$= 3 * 2x (x^2+1)^2$$

$$= 6x (x^2+1)^2$$

ملاحظة / مشتقة x هو ١

مثال جد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

① $y = 3 \Longrightarrow y' = 0$

② $y = x^6 \Longrightarrow y' = 6x^5$

③ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

④ $y = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 6 \Longrightarrow y' = 12x^2 + 4x + 8$ (حاصل جمع)

⑤ $y = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \Longrightarrow y' = -6x^{-3}$

or $= \frac{x^2 \times 0 - 3 \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-6x}{x^4} = -6x^1 \times x^{-4} = -6x^{-3}$

⑥ $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow y = x^{-\frac{1}{2}}$ (دالة مرتبة)

$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

⑦ $y = 3.\sqrt{x}$ (حاصل ضرب)

$y' = 3 * \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{x} * 0$

$= \frac{3}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

⑧ $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (قوى عدد موجب الى عدد)

$y' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} * (0-2x^{2-1})$

$= \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$

$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

ملاحظة / $\frac{1}{x}$ او $\frac{4}{2x}$ لا تطبق عليه قانون القوة
الثابت نضرب فقط بدون التكامل اي البسط ونشتق

(9) $f(x) = x^6 + x^2$

$f'(x) = 6x^5 + 2x$

(10) $f(x) = 10 + \frac{2}{x^3} = 10 + 2x^{-3}$

$f'(x) = 0 + -3 * 2\,(x)^{-3-1}$

$= -6x^{-4}$

(10) $x = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 2$

$y = x^{\frac{1}{2}} - x^{-1} + 2$

$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$

(11) $F(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} * (1) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(12) $y = \frac{1}{x^{10}} - x^9 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= x^{-10} - x^9 - x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -10x^{-11} - 9x^8 + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

حاصل ضرب

(13) $y = 10x(x^2+4)$

$y' = 10x(2x) + (x^2+4) * 10$

$= 20x^2 + 10x^2 + 40$

$= 30x^2 + 40$

(14) حاصل الضرب

$$y = (2x+3)(5+4x)$$

$$y' = (2x+3)(0+4) + (5+4x)(2+0)$$

$$= (2x+3)(4) + (5+4x)(2)$$

$$= 8x + 12 + 10 + 8x \quad = 16x + 22$$

(15)

ف١

$$f(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$$

ثم = + ×

اول

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} \quad = \frac{2}{(1-x)^2}$$

س١ :- (H.W) واجب

جد المشتقة dy/dx لكل مما يلي :-

(1) $y = x^2 - 8x + 5$

(2) $y = (x^2 - 4x + 3)^5$

(3) $y = \frac{6}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(4) $y = (2x-1)(5-4x)$

(5) $f(x) = (2 - 3x + x^2)^8$

(6) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

(7) $f(x) = (1+4x^3)(1+2x^2)$